

La série entière $1 + \frac{z}{\Gamma(1+i)} + \frac{z^2}{\Gamma(1+2i)} + \frac{z^3}{\Gamma(1+3i)} + \dots$ possède une frontière naturelle !

Changgui ZHANG*

Résumé – Les séries lacunaires sont les exemples les plus classiques des séries entières qui ne peuvent pas se prolonger au delà de leurs cercles de convergence ([4, § 93-94, p. 372-383], [8, §7.43, p. 223], ...). Dans la présente Note, nous étudions une famille de séries entières, non lacunaires, ayant pour coefficients des valeurs prises par la fonction Gamma sur des lignes verticales. Nous expliquons comment les représenter en termes de séries de Dirichlet lacunaires, ce qui nous permet de conclure à l'existence de leur frontière naturelle. Liés au comportement « aléatoire » de la fonction Gamma sur toute ligne verticale, les résultats ainsi obtenus verront également des explications dans notre travail en cours sur des équations aux q -différences-différentielles, dites « type pantagraphe » (voir [6] pour l'instant).

Abstract – The Power Series $1 + \frac{z}{\Gamma(1+i)} + \frac{z^2}{\Gamma(1+2i)} + \frac{z^3}{\Gamma(1+3i)} + \dots$ Has a Natural Boundary – The lacunary series are the most classical examples among all the power series whose circle of convergence constitutes a natural boundary ([4, § 93-94, p. 372-383], [8, §7.43, p. 223], ...). In this Note, we study a family of non-lacunary power series whose coefficients are given by means of values of the Gamma function over vertical line. We explain how to transform these series into lacunary Dirichlet series, which allows us to conclude the existence of their natural boundary. Our results, which illustrate in what manner the Gamma function may have a unpredictable behaviour on any vertical line, may also be partially understood in the framework of our forthcoming work on a class of differential q -difference equations, namely, on pantagraph type equations (see [6] for instance).

Dans un travail sur des équations linéaires fonctionnelles aux q -différences et différentielles (voir, pour l'instant, [6]), nous rencontrons une famille de séries de Laurent qui évoquent des valeurs de la fonction Gamma sur une ligne verticale. Le but de la présente Note est d'étudier leur prolongement analytique et de faire remarquer l'existence de la frontière naturelle.

Bien que la question de la coupure analytique, en tant que sujet de recherche général, semble devenue « démodée », nos séries, à coefficients « explicites », fournissent néanmoins des exemples « concrets et naturels » de séries non lacunaires qui ne peuvent se prolonger au delà du disque de convergence. Selon une idée généralement reçue, depuis le travail d'E. Fabry [5], chez une série à frontière naturelle, les coefficients de cette dernière paraîtront comme étant « arbitrairement donnés ». Ainsi nos séries permettent-elles d'illustrer à quel point est « arbitraire » le comportement de $\Gamma(a + ib)$ lorsque b tend vers l'infini suivant une progression arithmétique. Voir l'article [1] pour une étude sur la convexité de $\log \Gamma(z)$ dans le plan complexe et, en particulier, sur une droite verticale de celui-ci.

Le reste de l'article comprendra deux paragraphes : le théorème 1, notre principal résultat, sera énoncé dans le premier et sa démonstration sera faite dans le dernier.

*Laboratoire P. Painlevé (UMR – CNRS 8524), UFR Math., Université de Lille 1, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France. Courriel : Changgui.zhang@math.univ-lille1.fr

1 Notations et énoncés

Les notations \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} sont standard.

(1.1) Soit $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que $u \notin -\mathbb{N} + \frac{2vi}{\pi}\mathbb{Z}$ et considérons la série de Laurent notée $\Psi(u, v, z)$, de la variable z , définie par

$$\Psi(u, v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi}) z^n.$$

D'après la formule de Stirling, on a (cf [2, Corollary 1.4.4, p. 21]) :

$$\Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi}) = O(n^{u-\frac{1}{2}} e^{-|vn|})$$

lorsque l'indice n tend vers $\pm\infty$; on en déduit que, si $v \neq 0$, la série $\Psi(u, v, z)$ définit une fonction analytique dans la couronne \mathcal{C}_v avec ceci :

$$\mathcal{C}_v := \{z \in \mathbb{C} : e^{-|v|} < |z| < e^{|v|}\}.$$

Soit \mathbb{C}^+ le demi-plan $\Re u > 0$ de \mathbb{C} et \mathbb{R}^+ la demi-droite $v > 0$ de \mathbb{R} .

Théorème 1. *Pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^+$, la série $\Psi(u, v, z)$ admet $\partial\mathcal{C}_v$ pour frontière naturelle.*

(1.2) Ce théorème sera démontré dans le paragraphe 2; avant de faire ceci, nous nous contenterions de donner quelques conséquences du résultat.

D'abord, notons que la fonction $\Psi(u, v, z)$ satisfait aux relations suivantes :

$$\Psi(u+1, v, z) = (\frac{2vi}{\pi}\partial_z + u)\Psi(u, v, z), \quad \Psi(u, v, \frac{1}{z}) = \Psi(u, -v, z),$$

lesquelles nous permettent d'étendre le théorème 1 de la manière suivante.

Corollaire 1. *Pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$, si $u \notin -\mathbb{N} + \frac{2vi}{\pi}\mathbb{Z}$, alors la série de Laurent $\Psi(u, v, z)$ admet $\partial\mathcal{C}_v$ pour frontière naturelle.* \square

En considérant $\Psi(u, v, z)$ comme étant la somme d'une série entière de la variable z avec une série entière de $\frac{1}{z}$, nous déduisons aisément du corollaire 1 le

Corollaire 2. *Soit $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$ tel que $-u \notin \mathbb{N} + \frac{2iv}{\pi}\mathbb{N}$. La série entière $\sum_{n \geq 0} \Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi}) z^n$ admet le cercle $|z| = e^{|v|}$ pour frontière naturelle.* \square

(1.3) D'après la formule du complément de Γ , on a la relation

$$\Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi}) \Gamma(1 - u - \frac{2ivn}{\pi}) = \frac{2\pi i}{e^{\pi ui - 2vn} - e^{-\pi ui + 2vn}},$$

ou encore :

$$\frac{2\pi i}{\Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi})} = (e^{\pi ui - 2vn} - e^{-\pi ui + 2vn}) \Gamma(1 - u - \frac{2ivn}{\pi}),$$

laquelle, combinée avec le corollaire 2, nous conduit au résultat suivant, justifiant ainsi le titre de l'article.

Corollaire 3. *Soit $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$. La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi})}$ admet le cercle $|z| = e^{-|v|}$ pour frontière naturelle.* \square

(1.4) Les résultats présentés ci-dessus trouveront une explication partielle dans un ordre d'idées assez proche de celui du travail d'E. Fabry [5]. En effet, le couple (u, v) étant fixé dans $\mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}^+$, si

l'on note $\phi(n) = \arg \Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi}) \bmod 2\pi$, la formule de Stirling implique que, lorsque n augmente indéfiniment, $\phi(n)$ est d'ordre $n \ln n$ et

$$\phi(n+1) - \phi(n) = \frac{2v}{\pi} \ln\left(\frac{2vn}{\pi}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \bmod 2\pi.$$

(1.5) Mentionnons enfin qu'il serait plausible d'étendre les résultats de (1.1)-(1.3) aux séries pour lesquelles les coefficients α_n sont donnés par l'une des méthodes suivantes.

(A) $\alpha_n = R(\Gamma(u + \frac{2ivn}{\pi}))$, R étant une fraction rationnelle d'une variable.

(B) $\alpha_n = (a_{1,n} \dots a_{\ell,n}) / (b_{1,n} \dots b_{m,n})$, où $\ell, m \in \mathbb{N}$, $\ell + m > 0$ et où chaque facteur $a_{j,n}$ ou $b_{j,n}$ est de la forme $\Gamma(u_j + \frac{2iv_j n}{\pi})$, les $(\ell + m)$ couples (u_j, v_j) étant supposés « génériquement non liés ».

(C) Combiner les méthodes (A) et (B).

2 Démonstration du théorème 1

Elle se fait au moyen d'une représentation de $\Psi(u, v, z)$ en termes de série de Dirichlet, obtenue depuis l'intégrale eulérienne de Γ et du théorème des résidus.

Dans ce paragraphe, nous rappelons que $\Re u > 0$ et $v > 0$.

(2.1) Soit L_+ et L_- deux demi-droites partant de l'origine dans le premier quadrant et dans le quatrième quadrant respectivement, c'est-à-dire, $L_+ =]0, \infty e^{i\epsilon}[$ et $L_- =]0, \infty e^{-i\epsilon'}[$ avec $\epsilon, \epsilon' \in]0, \frac{\pi}{2}[$; afin d'alléger l'exposition, nous supposons $\epsilon' = \epsilon$. A l'aide de l'intégrale eulérienne de Γ , on écrit :

$$\Psi(u, v, z) = \sum_{n \geq 0} \int_{L_+} e^{-t} t^u \left(t^{\frac{2iv}{\pi}} z\right)^n \frac{dt}{t} + \sum_{n < 0} \int_{L_-} e^{-t} t^u \left(t^{\frac{2iv}{\pi}} z\right)^n \frac{dt}{t},$$

où $t^\alpha = e^{\alpha \text{Log } t}$, Log désignant la branche principale du logarithme dans le plan complexe ou, plus exactement, dans la surface de Riemann associée.

Supposons que $z \in \mathbb{C}$ satisfasse aux conditions suivantes :

$$\sup_{t \in L_+} |zt^{\frac{2iv}{\pi}}| < 1, \quad \sup_{t \in L_-} |zt^{\frac{2iv}{\pi}}| > 1,$$

ou, de manière équivalente,

$$e^{-\frac{2v}{\pi}\epsilon} < |z| < e^{\frac{2v}{\pi}\epsilon}, \quad \epsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[;$$

sous ses conditions, et par un argument standard de type Fibini, on arrive à la représentation intégrale suivante :

$$(I) \quad \Psi(u, v, z) = \int_{L_+ - L_-} \frac{e^{-t} t^u}{1 - zt^{\frac{2iv}{\pi}}} \frac{dt}{t}.$$

(2.2) Soit $z \in \mathcal{C}_v$ et choisissons ϵ suffisamment proche de $\frac{\pi}{2}$ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de façon à avoir l'intégrale (I) pour $\Psi(u, v, z)$; supposons, en plus, que $\arg z \in]-\pi, \pi]$. En annulant le dénominateur $1 - zt^{\frac{2iv}{\pi}}$ sous le signe intégral de (I), on trouve que les pôles, simples, de l'intégrand dans le demi-plan à droite constituent la « spirale » $t_z \tilde{v}^{\mathbb{Z}}$, avec

$$t_z = z^{-\frac{\pi i}{2v}} = e^{-\frac{\pi i}{2v} \text{Log } z}, \quad \tilde{v} = e^{\frac{\pi^2}{v}} \in]1, +\infty[;$$

on remarquera que cette spirale se situe entre L_+ et L_- .

Ceci étant, le théorème des résidus appliqué à l'intégrale (I) nous conduit à l'expression suivante :

$$(D) \quad \Psi(u, v, z) = \frac{\pi^2 e^{-\frac{\pi i}{2v} \text{Log } z}}{v} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{v}^{ku} e^{-t_z \tilde{v}^k},$$

dans laquelle la série du second membre est une « série de Dirichlet » ; voir [7, Chapter IX, §8, p. 432-440].

(2.3) Soit $u \in \mathbb{C}^+$, $q > 1$ et considérons les séries suivantes :

$$(S) \quad S_-(u, q, \zeta) = \sum_{k < 0} q^{ku} e^{-\zeta q^k}, \quad S_+(u, q, \zeta) = \sum_{k \geq 0} q^{ku} e^{-\zeta q^k}.$$

Il est clair que $S_-(u, q, \zeta)$ définit une fonction entière de la variable ζ . D'autre part, $S_+(u, q, \zeta)$ définit une fonction analytique dans le demi-plan $\Re \zeta > 0$ et l'axe imaginaire $\Re \zeta = 0$ en forme une frontière naturelle : voir l'appendice à la fin de l'article. On terminera ainsi la preuve du théorème 1 grâce à l'expression (D), avec $q = \tilde{v}$ et $\zeta = t_z$. \square

(2.4) Observons enfin que, dans (S), on a les relations fonctionnelles

$$q^u S_-(u, q, q\zeta) - S_-(u, q, \zeta) = e^{-\zeta}, \quad q^u S_+(u, q, q\zeta) - S_+(u, q, \zeta) = -e^{-\zeta};$$

ou encore, en posant $S(u, q, \zeta) = S_-(u, q, \zeta) + S_+(u, q, \zeta)$:

$$q^u S(u, q, q\zeta) = S(u, q, \zeta).$$

Ces relations représentent des équations linéaires aux q -différences singulières régulières (ou dites fuchsienues) en $\zeta = 0$; voir [3] et [9].

Appendice – Par analogie avec la théorie des séries entières lacunaires, voici un énoncé concernant la série de Dirichlet. Soit $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ une suite de réels strictement croissante telle que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$. Soit $A(s) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet, avec $a_n \in \mathbb{C}$; on notera $\sigma = \sigma_c(A)$ son abscisse de convergence. Si σ est finie, alors l'axe $\Re s = \sigma$ constitue une coupure analytique pour la série A .

Remerciement – L'Auteur tient à remercier Professeur Hervé Queffélec de lui avoir « prouvé à la main » l'énoncé inclus dans l'appendice et remercier Professeur Jean-François Burnol pour ses commentaires et remarques.

Références

- [1] P. Ahern et W. Rudin, Geometric properties of the Gamma Function, *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 678-681.
- [2] G. Andrews, R. Askey et R. Roy, *Special Functions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 71, Cambridge University Press, 2000.
- [3] L. Di Vizio, J.-P. Ramis, J. Sauloy et C. Zhang, Équations aux q -différences, *Gaz. Math.* **96** (2003), 20-49.
- [4] P. Dienes, *The Taylor Series. An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford, The Clarendon Press, 1931.
- [5] E. Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **13** (1896), 367-399.
- [6] T. Kato et J.B. McLeod, The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), 891-937.
- [7] S. Saks et A. Zygmund, *Analytic functions*, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa-Wrocław, 1952.
- [8] E.C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1939.
- [9] C. Zhang, Développements asymptotiques q -Gevrey et séries Gq -sommables, *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), 227-261.